I. S. F. A. 2006-2007

Concours d'Entrée

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Calculatrice autorisée

OPTION A

Le sujet est constitué de deux exercices et d'un problème tous indépendants

EXERCICE 1 : REDUCTION DES MATRICES DE RANG 1

1. Donner deux exemples de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (matrices 3×3) de rang 1, la première matrice diagonalisable et la seconde matrice non diagonalisable (justifier).

2. Dans toute cette question, A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

a. Montrer qu'il existe n réels $a_1, a_2, ..., a_n$ tels que la matrice A soit semblable à la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & . & 0 & a_1 \\ . & . & . & a_2 \\ . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

b. Justifier que la matrice A est trigonalisable.

c. Montrer que la matrice A est diagonalisable si et seulement si, $\operatorname{trace}(A) \neq 0$.

3. Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E tel que $\operatorname{trace}(u) = \operatorname{rang}(u) = 1$, montrer que u est un projecteur de E.

4. Dans cette question, $n = 4$.

a. Diagonaliser la matrice de rang 1 : $J \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dont tous les termes sont égaux à 1.

b. **En déduire** la réduction de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2007 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2007 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2007 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2007 \end{pmatrix}$.

On précisera la matrice de passage.

EXERCICE 2

On considère l'ensemble E des fonctions f de classe C^2 de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant :

$f(0) = f(1) = 0$ et $f'(0) = 1$.

1. Si f est un élément de E, déterminer $\int_0^1 (t-1)\, f''(t)\, \mathrm{d}t$.

2. Si f est un élément de E, montrer que $\int_0^1 \left(f''(t)\right)^2 \mathrm{d}t \geq 3$.

On pourra utiliser une inégalité de Cauchy-Schwarz.

3. Montrer qu'il existe un unique réel k tel que l'équation différentielle $y'' = k\,(t-1)$ admette comme solution un élément de E. Montrer en même temps que cette solution est unique.

4. Déterminer $\inf\limits_{f\in E} \int_0^1 \left(f''(t)\right)^2 \mathrm{d}t$;

PROBLEME: **UN THEOREME DE HARDY-LITTLEWOOD**

Notation : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ désignera la limite finie ou infinie, lorsqu'elle existe, de f quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

Le but du problème est de démontrer le théorème ci-dessous :

> Si la fonction f est définie sur $]-1,1[$ par $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ où (a_n) est une suite de réels positifs, il y a équivalence entre (1) et (2) :
>
> (1) : $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)f(x)=1$
>
> (2) : $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \sim n$

PREMIERE PARTIE

1. Importance de l'hypothèse « (a_n) est une suite de réels positifs ».

On considère la fonction f définie sur $]-1,1[$ par : $f(x)=4\dfrac{1-x}{\left(1-x^2\right)^2}$.

a. Montrer que la fonction f est développable en série entière au voisinage de 0.

b. On note pour $x\in\,]-1,1[$, $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$, montrer que f vérifie (1) et ne vérifie pas (2).

2. Dans cette question, f est définie sur $]-1,1[$ par : $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha_n\, x^n$ où $\sum\alpha_n$ est une série de réels positifs et divergente.

a. Montrer que la fonction f admet une limite quand x tend vers 1^- et déterminer $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$.

b. Soit (b_n) une suite de réels vérifiant $\alpha_n \sim b_n$ au voisinage de $+\infty$.

On pose pour $x\in[0,1[$, $g(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n$.

i. Soit un réel $\varepsilon>0$, justifier qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n\geq n_0$ on ait $|\alpha_n-b_n|\leq\dfrac{\varepsilon}{2}\alpha_n$.

ii. Montrer que pour tout $x\in\,]0,1[$, $|f(x)-g(x)|\leq\sum\limits_{n=0}^{n_0-1}|\alpha_n-b_n|+\dfrac{\varepsilon}{2}f(x)$.

iii. Conclure que, pour x au voisinage de 1^-, $f(x)\sim g(x)$.

c. *Application*

Si la suite de réels positifs (α_n) converge vers un réel non nul l (donc $\alpha_n\sim l$), donner un équivalent, au voisinage de 1^-, de $f(x)$.

3. Soit la fonction f définie sur $]-1,1[$ par : $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ où (a_n) est une suite de réels positifs et vérifiant (2) : $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \sim n$.

a. Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n .$$

On précisera le rayon de convergence de ce développement en série entière.

b. Déterminer un équivalent au voisinage de 1^- de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$.

c. Conclure que $\lim_{x\to 1^-}(1-x)f(x) = 1$.

DEUXIEME PARTIE

Soit la fonction f définie sur $]-1, 1[$ par : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ où (a_n) est une suite de réels positifs et vérifiant (1) : $\lim_{x\to 1^-}(1-x)f(x) = 1$.

On notera $\mathcal{B}$ l'espace vectoriel des applications bornées de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme notée $\| \ \|_\infty$: pour $f \in \mathcal{B}$, $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

4. Si $g \in \mathcal{B}$, justifier que pour $x \in [0, 1[$, la série $\sum_{n\geq 0} a_n\, x^n\, g(x^n)$ converge.

On notera pour g élément de $\mathcal{B}$ et $x \in [0, 1[$, $S(g)(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n\, g(x^n)$.

On considère l'ensemble E des éléments de $\mathcal{B}$ pour lesquels la fonction $S(g)$ admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et, pour g élément de E, on posera $l(g) = \lim_{x\to 1^-} S(g)(x)$.

5. Propriétés

a. Si $k \in \mathbb{N}$ et $g_k : x \mapsto x^k$, calculer $l(g_k)$. Ensuite comparer le résultat avec $\int_0^1 x^k \mathrm{d}x$.

b. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que l'application $l : E$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g \mapsto l(g)$ est linéaire.

c. Montrer que l'application l est continue (E est muni de $\| \ \|_\infty$) et calculer $|\!|\!| \, l \, |\!|\!|$.

6. Si g est une fonction continue sur $[0, 1]$, montrer que $l(g)$ existe et que $l(g) = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

On pourra utiliser le théorème de Weierstrass suivant : toute fonction continue sur un segment est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynômes.

7. On considère la fonction h élément de $\mathcal{B}$ définie par :

$$h(x) = 0 \text{ pour } x \in \left[0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right[\quad \text{et} \quad h(x) = \frac{1}{x} \text{ pour } x \in \left[\frac{1}{\mathrm{e}}, 1\right].$$

On choisit un réel $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right[$.

a. On désigne par a_ε la fonction continue sur $[0, 1]$ qui coïncide avec h sur les intervalles $\left[0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$ et $\left[\frac{1}{\mathrm{e}} + \varepsilon, 1\right]$ et qui est affine sur l'intervalle $\left[\frac{1}{\mathrm{e}}, \frac{1}{\mathrm{e}} + \varepsilon\right]$ et on désigne par b_ε la fonction continue sur $[0, 1]$ qui coïncide avec h sur les intervalles $\left[0, \frac{1}{\mathrm{e}} - \varepsilon\right]$ et $\left[\frac{1}{\mathrm{e}}, 1\right]$ et qui est affine sur l'intervalle $\left[\frac{1}{\mathrm{e}} - \varepsilon, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$.

On a ainsi $a_\varepsilon \leq h \leq b_\varepsilon$: construire les trois fonctions définies sur $[0, 1]$.

Uniquement à l'aide de la figure et par des considérations d'aires de triangles, déterminer une constante λ telle que :

$$\int_0^1 b_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x + \lambda\,\varepsilon \quad \text{et} \quad \int_0^1 a_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x - \lambda\,\varepsilon .$$

b. Montrer qu'il existe un réel $\alpha \in [0,1[$ tel que pour tout réel $x \in [\alpha, 1[$ on ait :

$$-\varepsilon + l(a_\varepsilon) \leq S(a_\varepsilon)(x) \leq S(h)(x) \leq S(b_\varepsilon)(x) \leq \varepsilon + l(b_\varepsilon) .$$

c. Conclure que la fonction $h \in E$ et déterminer $l(h)$.

d. Pour N entier naturel non nul, déterminer $S(h)(\mathrm{e}^{\frac{-1}{N}})$ et en déduire que : $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n \sim N$.

8. *Application*

Proposer, en utilisant la question **3. c**., une démonstration du théorème de Cesàro :

si la suite de réels (u_n) converge vers un réel l non nul alors la suite $\left(\dfrac{u_0 + u_1 + \ldots + u_n}{n+1}\right)$ converge vers l.

9. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ avec, pour $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{1}{\sum_{k=1}^{n} \sqrt[k]{k}}$.
